Meccanica e Tecnica delle Costruzioni Meccaniche
Esercitazioni del corso. Periodo II
Prof. Leonardo BERTINI
Ing. Ciro SANTUS

Esercitazione 09:
Forze d'inerzia e oscillatore armonico

Indice

1 Moto relativo **1**

2 Utilizzo delle forze d'inerzia **2**
2.1 Dinamica del meccanismo biella–manovella 4

3 Modello di un oscillatore ad un grado di libertà **5**
3.1 Oscillatore smorzato 6

1 Moto relativo

Dati due sistemi di riferimento, un primo sistema $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ ed un secondo sistema $\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}'$, la velocità di un generico punto materiale può essere espressa sia rispetto al primo sistema: $\vec{v}_\mathrm{a}$, sia rispetto all'altro sistema: $\vec{v}_\mathrm{r}$. In generale, le velocità dello *stesso* punto materiale, osservate dai due sistemi sono *diverse*, e legate dalla relazione:

$$\vec{v}_\mathrm{a} = \vec{v}_\mathrm{t} + \vec{v}_\mathrm{r}$$

in cui $\vec{v}_\mathrm{t}$ è la velocità osservata dal primo sistema di riferimento del punto appartenente al secondo sistema in cui istantaneamente cade il punto materiale. Le velocità $\vec{v}_\mathrm{a}, \vec{v}_\mathrm{t}, \vec{v}_\mathrm{r}$ vengono indicate come velocità *assoluta*, di *trascinamento* e *relativa*, rispettivamente.
Una relazione analoga vale per le accelerazioni. Siano $\vec{a}_\mathrm{a}$ e $\vec{a}_\mathrm{r}$ le accelerazioni assoluta e relativa del punto materiale osservate rispetto a due sistemi di riferimento diversi, vale la relazione:

$$\vec{a}_\mathrm{a} = \vec{a}_\mathrm{t} + \vec{a}_\mathrm{c} + \vec{a}_\mathrm{r} \tag{1}$$

in cui: l'accelerazione di *trascinamento* $\vec{a}_\mathrm{t}$ è l'accelerazione osservata dal primo sistema di riferimento del punto appartenente al secondo sistema in cui istantaneamente cade il punto materiale, mentre il termine $\vec{a}_\mathrm{c}$ è l'accelerazione di Coriolis (che non ha un corrispettivo nella relazione precedente relativa alle velocità) e che è pari a:

$$\vec{a}_\mathrm{c} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_\mathrm{r}$$

in cui $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del secondo sistema di riferimento osservata dal primo.
In alcune situazioni il termine $\vec{a}_{\mathrm{c}}$ è nullo, ad esempio se $\vec{v}_{\mathrm{r}} = 0$, ossia se il punto materiale è fermo rispetto al secondo sistema di riferimento, oppure se $\vec{\omega} = 0$, ossia se il secondo sistema rispetto al primo non ruota, pur eventualmente spostandosi.

2 Utilizzo delle forze d'inerzia

La legge fondamentale della dinamica:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

è valida qualora $\vec{a}$ venga osservata rispetto ad un sistema inerziale.
Supponendo di avere l'accelerazione a_{r} rispetto ad un sistema *non* inerziale, preso un secondo sistema inerziale, le accelerazioni sono legate dall'Eq.1 (tale equazione è di natura cinematica per cui vale per qualsiasi coppia di sistemi di riferimento, anche entrambi non inerziali):

$$m\vec{a}_{\mathrm{r}} = \vec{F} - m\vec{a}_{\mathrm{t}} - m\vec{a}_{\mathrm{c}} \tag{2}$$

I due termini $-m\vec{a}_{\mathrm{t}}, -m\vec{a}_{\mathrm{c}}$ sono definiti come forze d'inerzia di *trascinamento* e di *Coriolis*.
Le forze d'inerzia vengono talvolta dette *apparenti*, in quanto sono appunto solo componenti dell'accelerazione e non effettive forze esercitate sul punto materiale. L'aspetto fondamentale che distingue le forze d'inerzia *apparenti* da quelle *vere* è che per le forze d'inerzia non vale il principio di azione e reazione, dato che non si tratta di una interazione con un altro corpo.
Per quanto l'utilizzo delle forze d'inerzia possa sembrare un'inutile complicazione, molti problemi di dinamica possono essere risolti in modo più agevole osservando il moto rispetto ad un sistema non inerziale.

In Fig.1 si mostra l'esempio più classico di utilizzo del concetto di forze d'inerzia. Un punto materiale che si muove lungo una traiettoria circolare, di moto rettilineo uniforme e il cui moto viene osservato da un sistema di riferimento non inerziale, che ruota intorno al centro della traiettoria con la stessa velocità angolare del punto materiale.

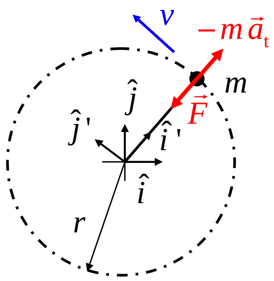


Figura 1: Punto materiale in moto lungo una traiettoria circolare. Utilizzo di un secondo sistema di riferimento non inerziale.

Sapendo che $\hat{i}, \hat{j}$ costituisce un sistema inerziale, considerando invece il sistema non inerziale $\hat{i}', \hat{j}'$, individuare i termini dell'Eq.2.

Osservazione:
Il termine *forza centrifuga* rappresenta appunto la forza d'inerzia $-m\vec{a}_t$ e quindi non è una forza vera ma una forza apparente.

In Fig.2 si mostra un cilindro con elementi longitudinali sulla superficie laterale, posto in rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}$.

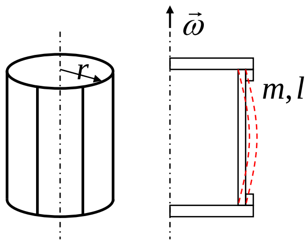


Figura 2: Cilindro con elementi longitudinali in rotazione.

Ogni singolo elemento laterale, di massa m e di lunghezza l, è obbligato ad eseguire una traiettoria circolare di raggio r per cui è sottoposto ad un'accelerazione.
Determinare le caratteristiche della sollecitazione del generico elemento laterale (considerandolo come trave), e sfruttando il concetto di forza centrifuga.
Determinare, inoltre, la massima tensione di flessione nel caso in cui l'elemento laterale abbia sezione $b \times h$.
I dati del problema sono:

$$
\begin{aligned}
&l = 350 \text{ mm}\\
&b = 15 \text{ mm}\\
&h = 25 \text{ mm}\\
&r = 200 \text{ mm}\\
&\rho = 7.86 \text{ kg/dm}^3\\
&n = 3\,000 \text{ giri/min}
\end{aligned}
$$

in cui: ρ è la densità (in questo esempio si considera la densità dell'acciaio) e n è il numero di giri al minuto.

Soluzione:
La massima tensione di flessione è: $\sigma(\max) = 570$ MPa.

2.1 Dinamica del meccanismo biella–manovella

In Fig.3 si mostra il meccanismo biella–manovella, in grado di trasformare un moto alternato longitudinale in rotatorio, o viceversa.

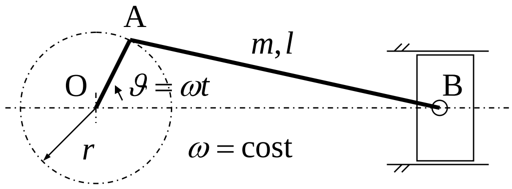


Figura 3: Meccanismo biella–manovella.

Determinare le caratteristiche della sollecitazione dell'elemento biella (modello a trave), nelle configurazioni notevoli del meccanismo, considerando soltanto gli effetti dinamici, quindi in assenza di carichi esterni.

Suggerimento:
Semplificare la cinematica del meccanismo al primo ordine, in particolare considerando la lunghezza dell'elemento biella molto più grande del raggio della manovella (anche se invece spesso queste due lunghezze sono confrontabili, ad esempio nei motori automobilistici). Determinare le accelerazioni alle estremità della biella ed estrapolare linearmente le accelerazioni nei punti intermedi.

3 Modello di un oscillatore ad un grado di libertà

Sistemi dinamici molto importanti sono gli ‘oscillatori’ ossia quei sistemi che vibrano nell’intorno della loro configurazione di riferimento.
L’oscillatore ad un grado di libertà è costituito da un elemento ad elasticità concentrata (molla) ed un elemento ad inerzia concentrata (massa), Fig.4.

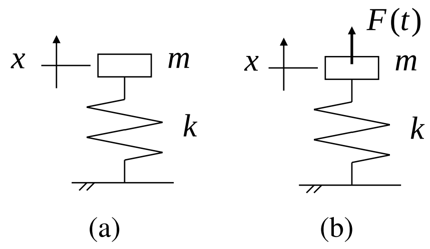


Figura 4: Oscillatore ad un grado di libertà: (a) moto libero, (a) moto forzato.

L’equazione differenziale del moto è:

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \tag{3}$$

in cui: k è la rigidezza della molla, m è la massa, x è il discostamento dalla posizione di riposo e $F(t)$ è la forza applicata alla molla variabile nel tempo.
Nel caso in cui l’oscillatore sia abbandonato a se stesso ($F(t) = 0$), la massa oscilla con una frequenza naturale pari a:

$$\omega_\mathrm{n} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

quindi:

$$x(t) = A\cos(\omega_\mathrm{n} t + \varphi_0) \tag{4}$$

in cui A, φ_0 dipendono dalle condizioni iniziali. Ovviamente il sistema oscilla solo se viene abbandonato o in una posizione diversa da quella di riposo, oppure ad una velocità non nulla. Quindi $A = 0$ soltanto se inizialmente il corpo ha velocità nulla e si trova nella configurazione di riferimento.
Nel caso in cui l’oscillatore sia sollecitato da una forza esterna $F(t)$ il moto è ovviamente dipendente da tale forza, oltre che comunque dalle condizioni iniziali. Tuttavia, le condizioni iniziali hanno un ruolo sulla dinamica dell’oscillatore limitato nel tempo. Nel caso in cui la forza esterna sia di tipo armonico:

$$F(t) = F\cos(\omega t + \varphi)$$

con: $\omega \neq \omega_\mathrm{n}$ la risposta dell’oscillatore è (dopo che il transitorio delle condizioni iniziali si è estinto):

$$x(t) = \frac{F/k}{1 - (\omega/\omega_\mathrm{n})^2}\cos(\omega t + \varphi) \tag{5}$$

Come ben noto, la forma della soluzione appena trovata mette in evidenza la possibilità di verificarsi la condizione di *risonanza* per $\omega = \omega_\mathrm{n}$. In tale condizione l’oscillazione si amplifica indefinitivamente.

3.1 Oscillatore smorzato

Nel caso il moto venga impedito da un effetto di dissipazione, interviene un ulteriore parametro concentrato che è la viscosità c, Fig.5.

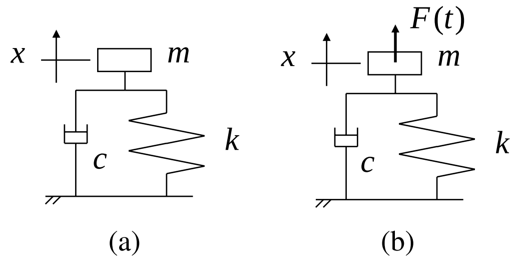


Figura 5: Oscillatore ad un grado di libertà smorzato: (a) moto libero, (a) moto forzato.

Nell'ipotesi di viscosità proporzionale alla velocità il moto dello smorzatore è descritto dal'equazione:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{6}$$

Nel caso in cui l'oscillatore sia abbandonato a se stesso ($F(t) = 0$), analogamente a prima, la massa oscilla, ma con un progressivo rallentamento. L'equazione del moto è:

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega' t + \varphi_0) \tag{7}$$

in cui: ω_n è definita come sopra e:

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \qquad \omega' = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

In realtà questa soluzione è valida soltanto se lo smorzamento è 'piccolo', ossia se $\xi < 1$, che equivale alla condizione $c < c_c$, in cui c_c è la viscosità 'critica' pari a: $c_c = 2m\omega_n$.
Nel caso in cui l'eccitazione esterna sia di tipo armonico:

$$F(t) = F\cos(\omega t + \varphi)$$

la soluzione (dopo transitorio iniziale) è:

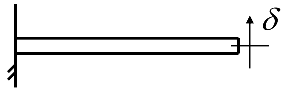
$$x(t) = \frac{F/k}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + 4\xi^2(\omega/\omega_n)^2}}\cos(\omega t + \varphi + \varphi_c) \tag{8}$$

in cui:

$$\tan\varphi_c = -2\frac{\xi(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

Da notare che, nel caso di viscosità non nulla, la condizione di risonanza ($\omega = \omega_n$) non causa una soluzione singolare, ma semplicemente un'ampiezza di oscillazione molto grande.
È bene inoltre ricordare che un certo valore minimo di viscosità è intrinseco in ogni sistema e quindi la risonanza non è mai una singolarità, ma comunque un problema pratico importante. Infine, la presenza di una certa viscosità (anche se piccola) giustifica la possibilità di trascurare il transitorio relativo alle condizioni iniziali, che appunto si estingue per effetto dissipativo.

Determinare la frequenza propria del sistema dinamico costituito da una trave incastrata ad un'estremità, Fig.6.



Sez.: $b \times h$ Rigidezza: E

Lungh.: L Densità: ρ

Figura 6: Oscillazione trave incastrata.

I dati del problema sono:

$$b = 12 \text{ mm}$$
$$h = 18 \text{ mm}$$
$$L = 1.2 \text{ m}$$
$$\rho = 7.86 \text{ kg/dm}^3$$
$$E = 205\,000 \text{ MPa}$$

Suggerimento:
Ricondurre il sistema ad un oscillatore ad un grado di libertà, determinando la rigidezza all'estremità della trave e considerando una frazione di tutta la massa concentrata all'estremità (ad esempio pari a metà massa totale).

Soluzione:
La frequenza propria *stimata* è: $f_\mathrm{n} = \omega_\mathrm{n}/(2\pi) = 7.2$ Hz.

Con riferimento all'esercizio precedente, partendo dall'informazione che il sistema lasciato libero di vibrare, riduce la propria ampiezza di oscillazione di un fattore 2, dopo un certo tempo: $t_2 = 3$ s, determinare il coefficiente di viscosità c, rifacendosi al sistema oscillatore smorzato.

Soluzione:
La viscosità è: $c = 0.471$ kg/s.
Lo smorzamento relativo $\xi = c/c_\mathrm{c}$ è pertanto: $\xi = 5.119 \times 10^{-3}$.